ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Э.Ф. Абдылдаева, А. Керимбеков
Кыргызско-Турецкий Университет,
Кыргызско-Российский Славянский Университет, Бишкек

В статье исследованы вопросы построения обобщенного решения сопряженной краевой задачи, которая появляется при решении задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. Указан алгоритм построения обобщенного решения и установлены достаточные условия его существования и единственности.

Ключевые слова. Сопряженная краевая задача, обобщенное решение, интегральное уравнение, резольвента, существование, единственность.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau - 2\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]\ x\in Q,\ 0\le t<T, \tag{1}$$

$$\omega(\mathrm{T},x)=0,\quad \omega_t(\mathrm{T},x)=0, \tag{2}$$

$$\Gamma\omega(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big(a_{ij}(x)\omega_{x_j}(t,x)\Big)_{x_i}-c(x)\omega(t,x)=0, \tag{3}$$

которая появляется при исследовании задачи минимизации функционала

$$J[u(t,x)]=\int_0^T\int_Q[V(t,x)-\xi(t,x)]^2dxdt+2\beta\int_0^T\int_Q p[t,x,u(t,x)]dxdt,\ \beta>0,$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)],x\in Q\subset R^n,0<t\le T \tag{4}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x),\ x\in \mathrm{Q}, \tag{5}$$

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1,n}^{n}a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i)+a(x)V(t,x)=0,x\in\gamma,0<t\le T, \tag{6}$$

где $Q_T=Q\times\big(0,T\big]$, Q -область пространства R^n ограниченная кусочно гладкой кривой γ; A –эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),$$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,\ \ c_0>0,$$

δ -вектор нормали исходящий из точки $x\in\gamma$; $K\big(t,\tau\big)$–заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\big(t,\tau\big)d\tau dt=K_0<\infty, (7)$$

т.е. является элементом гильбертово пространства $H(\mathrm{D})$;

$$\psi_1(x)\in H_1(Q),\psi_2(x)\in H(Q),f_u[t,x,u(t,x)]\ne 0,\forall\,\mathrm{t}\in(0,\mathrm{T}), \tag{8}$$

заданные, а $a(x)\ge 0$, $c(x)\ge 0-$ известные измеримые функции; $H_1(Q)$- соболево пространство первого порядка; $f[t,x,u(t,x)]\in \mathrm{H}(\mathrm{Q}_T)$- функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t,x)\in H(Q_T)$ с ограниченным множеством допустимых значений, λ -параметр, Т-фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$.

Краевая задача (1)-(3) содержащая функцию $V(t,x)$ которая является решением краевой задачи (4)-(6), называется сопряженной краевой задачей по отношению к краевой задаче (4)-(6). В данной статье подробно изложен алгоритм построения решения сопряженной краевой задачи.

Известно [1], что, краевая задача (4)-(6) при условиях (7), (8) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x),\ V_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{9}$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ резольвента интегрального уравнения

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+a_n(t), (10)$$

с ядром $K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ K_n(0,s)=0 (11)$

и свободным членом

$$a_n(t)=\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)f_n[\tau,u]d\tau;\ (12)$$

функции $z_n(x)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ удовлетворяет краевой задаче

$$Az(x)=-\lambda^2 z(x),\quad x\in Q,\quad \Gamma z(x)=0,\quad x\in\gamma$$

и в совокупности образуют полную ортонормированную систему собственных функций в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет следующим условиям $\lambda_n\le\lambda_{n+1},\quad \forall n=1,2,3,\ldots,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

Сопряженная краевая задача будет исследована с учетом соотношений (9)-(12).

Решение сопряженной краевой задачи (1)-(3) ищем в виде ряда

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\,\mathrm{z}_n(x). \tag{13}$$

Коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$, при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$ определяется как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds+q_n(t), \tag{14}$$

где

$$B_n(s,t)=\int_t^T\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(\eta-t)K(s,\eta)d\eta,\quad B_n(s,\mathrm{T})=0,$$

$$q_n(t)=-2\int_t^T\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(\eta-t)[V_n(\eta)-\xi_n(\eta)]d\eta, \tag{15}$$

а $V_n(t)$ имеет вид (10).

Решение интегрального уравнения (14) находим по формуле [2]

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T W_n(s,t,\lambda)\,q_n(s)ds+q_n(t), \tag{16}$$

где $W_n(s,t,\lambda)$ резольвента ядра $B_n(s,t)$ имеет вид

$$W_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t)\ i=1,2,3,..., \tag{17}$$

а повторные ядра $B_{n,i}(s,t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$ определяются по формулам

$$B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\tau,t)B_{n,i}(s,\tau)d\tau,\ \ i=1,2,3,\dots,\ B_{n,1}(s,t)=B_n(s,t). \tag{18}$$

Согласно (11) и (15) непосредственными вычислениями устанавливаются следующие оценки

$$|B_{n,i}(s,t)|^2\le\frac{T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i}K_0^{i-1}\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta,\quad i=1,2,3,... \tag{19}$$

$$\int_0^T|B_{n,i}(s,t)|^2ds\le\frac{T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i}K_0^{i-1}\int_0^T\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta ds=\frac{T^{2i-1}K_0^i}{(\lambda_n^2)^i} \tag{20}$$

Сходимости ряда Неймана (17) следует из неравенства

$$W_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t)\le\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}|B_{n,i}(s,t)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\sqrt{\frac{T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i}K^{i-1}}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sqrt{T}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}},$$

которое справедливо для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1,$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$. Ряд Неймана абсолютно сходится для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|\frac{T}{\lambda_1}\sqrt{K_0}<1,$ для любого $n=1,2,3,\dots$.

Непосредственным вычислением устанавливается следующие неравенства

$$|W_n(s,t,\lambda)|\le\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}$$

и

$$\int_0^T W_n^2(s,t,\lambda)ds\le\frac{TK_0}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}.$$

Таким образом, решение сопряженной краевой задачи определяется формулой

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lambda\int_0^T W_n(s,t,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\Big]z_n(x). \tag{21}$$

Учитывая (12), (13) и (17) уравнение (16) перепишем в виде

$$\omega_n(t)=2\int_0^T E_n(\eta,t,\lambda)l_n(\eta)d\eta-2\int_0^T\left(\int_0^T E_n(\eta,t,\lambda)\varepsilon_n(\eta,\tau,\lambda)d\eta\right)f_n(\tau,u)d\tau, \tag{22}$$

где

$$E_n(\eta,t,\lambda)=\begin{cases}\lambda\int_0^\eta W_n(s,t,\lambda)\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(\eta-s)ds, & o\le\eta\le t,\\ \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(\eta-t)+\lambda\int_0^\eta W_n(s,t,\lambda)\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(\eta-s)ds, & t\le\eta\le T\end{cases} \tag{23}$$

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda_n(t-\tau)}{\lambda_n}+\displaystyle\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)\frac{\sin\lambda_n(s-\tau)}{\lambda_n}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\displaystyle\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)\frac{\sin\lambda_n(s-\tau)}{\lambda_n}ds, & t\le\tau\le T,\end{cases}\tag{24}$$

Теперь докажем, что функция (13) является элементом гильбертово пространства $H(Q_T)$. Непосредственными вычислениями установлены следующие оценки

$$\int_0^T E_n^2(\eta,t,\lambda)d\eta\le\frac{2T}{\lambda_n^2}\left(1+\lambda^2\frac{T^2K_0}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right);$$

$$\int_0^T l_n^2(\eta)d\eta\le 3\left\{\|\xi(t,x)\|_H^2+2T\left[1+\frac{\lambda^2T^2K_0}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right]\left(\psi_{1n}^2+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\right)\right\};$$

$$\int_0^T \varepsilon_n^2(\eta,\tau,\lambda)d\eta\le\frac{3T}{\lambda^2}\left(1+\frac{\lambda^2T^2K_0}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right).$$

С учетом этих оценок и свойства функции $f[t,x,u(t,x)]$ имеем неравенство

$$\int_0^T\int_Q\omega^2(t,x)dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^\infty\omega_n^2(t)dt\le4\int_0^T\sum_{n=1}^\infty\left\{\int_0^T E_n^2(\eta,t,\lambda)d\eta\int_0^T l_n^2(\eta)d\eta+\int_0^T\left(\int_0^T E_n(\eta,t,\lambda)\varepsilon_n(\eta,\tau,\lambda)\right)d\eta d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T f_n^2(\tau,u)d\tau\right\}dt\le4\int_0^T\sum_{n=1}^\infty\left\{\int_0^T E_n^2(\eta,t,\lambda)d\eta\int_0^T l_n^2(\eta)d\eta+\int_0^T\int_0^T E_n^2(\eta,t,\lambda)d\eta\int_0^T\varepsilon_n^2(\eta,\tau,\lambda)d\eta d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T f_n^2(\tau,u)d\tau\right\}dt\quad<\infty$$

из которого следует, что $\omega(t,x)$ является элементом гильбертово пространства $H(Q_T)$.

Специфической особенностью решения сопряженной краевой задачи, что функции $\varepsilon_n(t,\tau,\lambda),\quad E_n(\tau,t,\lambda)$ терпит разрыв на линии $t=\tau$.

Список литературы

1. Керимбеков А.К., Абдылдаева Э.Ф. Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. –Бишкек: Издательство КРСУ. Том 14, №12. –С.61-66.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1975.-303с.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.А. Айтбаев

Институт теоретической и прикладной математики НАН КР, г. Бишкек

Найдены достаточные условия существования решений задачи Коши и ее структура для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

Ключевые слова: Интегро-дифференциальные уравнения, задача Коши, принцип сжатых отображений.

В данной работе найдены достаточные условия существования решений задачи и ее структура. С этой целью применяется аналитический метод построения решений задачи, предложенный в [1, 2]. Сутью метода является преобразование решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, с целью применения принципа сжатых отображений.